Électromagnétisme – Chapitre 3

Magnétostatique

I. Courant et champ magnétostatique 1
I.1. Distribution de courants 1
I.2. Symétries et invariances 3
II. Conservation du flux 4
III. Théorème d'Ampère 5
III.1. Énoncé du théorème 5
III.2. Application au champ créé par un fil rectiligne infini 6

Dans le cadre de la magnétostatique, nous nous limitons à l'étude des champs magnétiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps, que l'on appelle alors **champs magnétostatiques** $\vec{B}(M)$.

I. Courant et champ magnétostatique

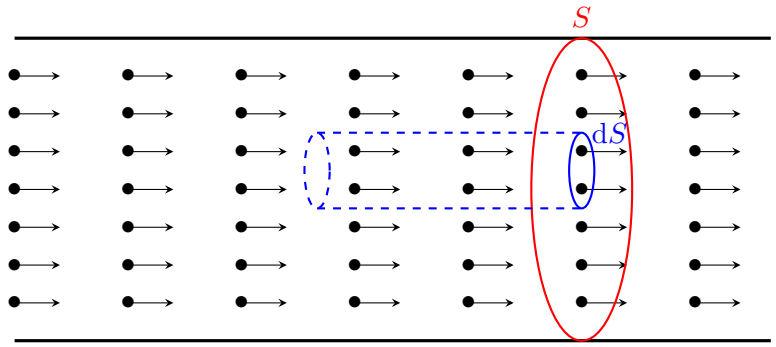
I.1. Distribution de courants

On rappelle que l'**intensité électrique** à travers une surface correspond à la charge électrique qui traverse cette surface par unité de temps, elle s'exprime en ampère (A).

En notant $\mathrm{d}Q$ la charge électrique qui traverse la surface S pendant un temps $\mathrm{d}t$, on peut exprimer l'intensité électrique :

On souhaite exprimer l'intensité électrique dans un milieu présentant une **densité volumique de particules** n, c'est-à-dire composé de n particules par unité de volume, chaque particule possédant une même charge q et une même vitesse $\vec{v}$. La densité volumique de charges d'un tel milieu est :

On considère dans un premier temps une surface S dont la normale est orientée selon $\vec{v}$.



Les particules traversant une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ sont comprises dans le cylindre de volume $v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$, et représentent donc une charge $\rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$. On en déduit la charge totale traversant la surface S pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}Q = \iint_S \rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

d'où l'expression de l'intensité électrique :

$$i = \iint_S \rho\, v \,\mathrm{d}S.$$

On peut généraliser ce résultat pour une surface S quelconque, dont la normale n'est pas forcément orientée selon $\vec{v}$, et on obtient alors l'expression de l'intensité électrique :

$$i = \iint_S \rho\, \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Pour justifier le produit scalaire, on peut prendre l'exemple d'une surface S confondue avec les parois du conducteur, on obtient alors $\mathrm{d}\vec{S} \perp \vec{v}$, et donc une intensité électrique nulle à travers cette surface.

On définit le **vecteur densité volumique de courants** :

il s'exprime en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

L'intensité électrique à travers une surface S quelconque peut alors s'exprimer :

elle correspond au flux du vecteur densité volumique de courants à travers cette surface.

Application :

> On considère un câble en cuivre cylindrique de section $S = 2\,\mathrm{mm}^2$ parcouru par une intensité $i = 1\,\mathrm{A}$. Sachant que la densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de $n \sim 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$, déterminons l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des électrons libres dans le câble.

Dans le cas d'un milieu présentant plusieurs espèces chargées, comme par exemple un électrolyte constitué d'anions et de cations, le vecteur densité volumique de courants s'exprime :

$$\vec{j} = \sum_i n_i\, q_i\, \vec{v}_i.$$

En présence de plusieurs courants, les champs magnétostatiques créés par chacun de ces courants s'additionnent. On en déduit alors que le champ magnétostatique vérifie le **principe de superposition** : le champ magnétostatique créé par un ensemble de courants est la somme des champs créés par chacun des courants, soit :

$$\vec{B}(M) = \sum_i \vec{B}_i(M)$$

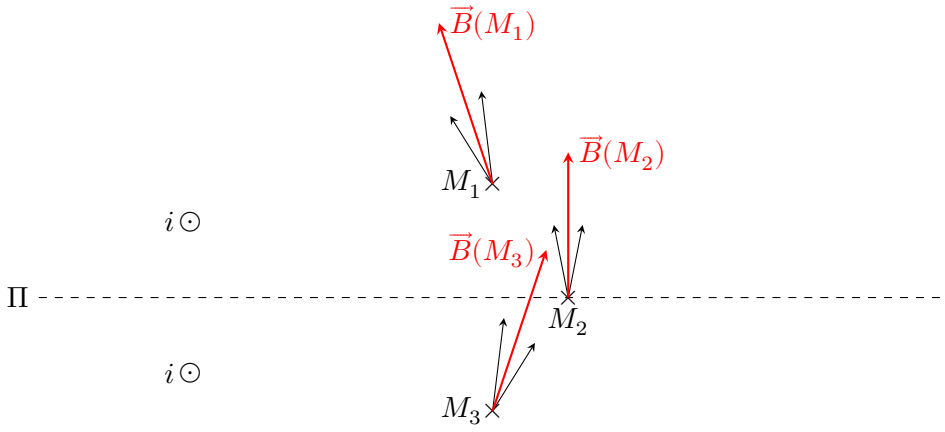
comme pour le champ électrostatique.

I.2. Symétries et invariances

Symétrie

Un plan Π est un **plan de symétrie** de la distribution de courants si pour tout point A présentant un vecteur densité volumique de courants, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) présente un vecteur densité volumique de courants identique.

Pour illustrer l'effet d'un plan de symétrie, on représente ci-dessous le champ magnétostatique créé par deux fils parallèles parcourus par une intensité identique, avec $i > 0$, en différents points.



On observe que les champs $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_3)$ sont antisymétriques par rapport au plan Π, et que le champ $\vec{B}(M_2)$ est perpendiculaire au plan Π.

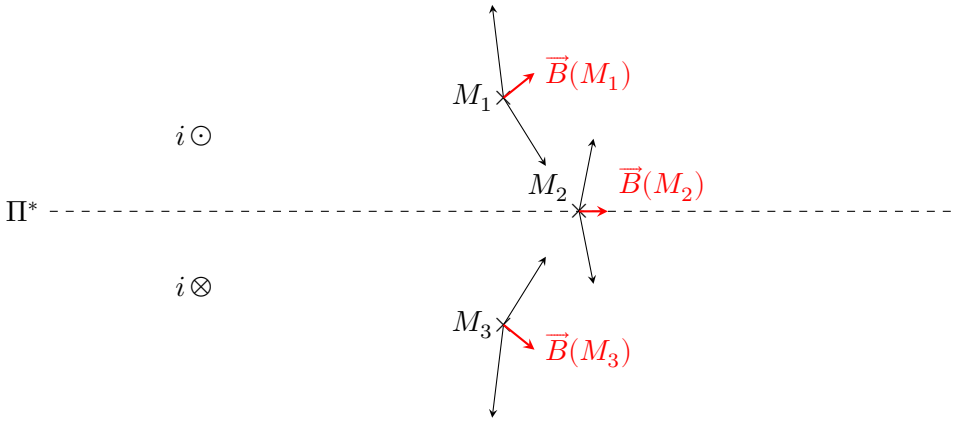
En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **antisymétrique** par rapport à un plan de symétrie Π ;
- pour tout point M situé sur un plan de symétrie Π, le champ $\vec{B}(M)$ est **perpendiculaire** à ce plan.

Antisymétrie

Un plan Π^* est un **plan d'antisymétrie** de la distribution de courants si pour tout point A présentant un vecteur densité volumique de courants, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) présente un vecteur densité volumique de courants opposé.

Pour illustrer l'effet d'un plan d'antisymétrie, on représente ci-dessous le champ magnétostatique créé par deux fils parallèles parcourus par une intensité opposée, avec $i > 0$, en différents points.



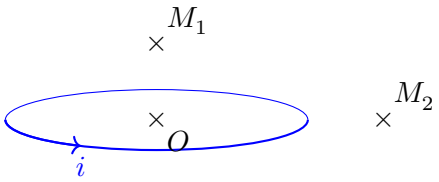
On observe que les champs $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_3)$ sont symétriques par rapport au plan Π^*, et que le champ $\vec{B}(M_2)$ est contenu dans le plan Π^*.

En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **symétrique** par rapport à un plan d'antisymétrie Π^* ;
- pour tout point M situé sur un plan d'antisymétrie Π^*, le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **contenu** dans ce plan.

Application :

Déterminons les plans de symétries et d'antisymétries de la distribution de courants pour cette spire circulaire, afin d'en déduire la direction du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ aux points M_1 et M_2.



Invariance

Comme pour le champ électrostatique, les **invariances** d'une distribution de courants se retrouvent dans le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé.

Application :

À l'aide des symétries et des invariances, déterminons la direction et les variables dont dépend le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par un fil infini rectiligne d'axe (Oz) parcouru par un courant.

II. Conservation du flux

On admet la propriété suivante :

- le flux du champ magnétostatique sortant à travers une surface fermée S est forcément nul, on dit que le flux du champ magnétostatique est **conservatif** :

Cette propriété est également vérifiée lorsque le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dépend du temps, et nous le montrerons dans un prochain chapitre à l'aide des équations de Maxwell.

Application :

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz) et de rayon R parcouru par un courant constant. On admet que le champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde est uniforme et s'exprime : $\vec{B}(M) = B\,\vec{e}_z$.
Montrons que le flux du champ magnétostatique sortant d'un tronçon du solénoïde est bien conservatif.

III. Théorème d'Ampère

III.1. Énoncé du théorème

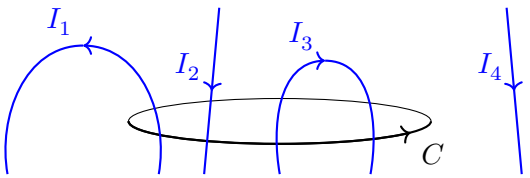
On admet le **théorème d'Ampère** :

- la circulation du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé et orienté C est :

  avec I_{enl} l'intensité enlacée par ce contour, c'est-à-dire la somme **algébrique** des intensités qui traversent une surface s'appuyant sur ce contour.

Application :

Exprimons l'intensité enlacée par le contour C.



Pour appliquer le théorème d'Ampère, on utilisera la méthodologie suivante :

1. choisir un système de coordonnées adapté ;
2. étudier les symétries de la distribution de courants pour obtenir la direction du champ $\vec{B}(M)$;
3. étudier les invariances de la distribution de courants pour obtenir les variables dont dépend le champ $\vec{B}(M)$;
4. définir un contour fermé et orienté C, appelé **contour d'Ampère**, permettant d'exprimer facilement $\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$:
   - soit avec des portions telles que $\vec{B}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sont colinéaires, on a alors : $\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = B\,\mathrm{d}\ell$,

- soit avec des portions telles que $\vec{B}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sont orthogonaux, on a alors : $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$,

5. exprimer l'intensité enlacée I_{enl} par le contour d'Ampère ;
6. appliquer le théorème d'Ampère pour en déduire le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$.

III.2. Application au champ créé par un fil rectiligne infini

On considère un fil rectiligne infini d'axe (Oz) parcouru par une intensité I.

Nous allons déterminer l'expression du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques.

Étude des symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que :

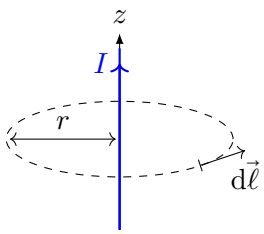
$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\, \vec{e}_\theta.$$

Étude des invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où :

$$\vec{B}(M) = B(r)\, \vec{e}_\theta.$$

Définition du contour d'Ampère : on choisit un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B(r)\, \vec{e}_\theta) \cdot (\mathrm{d}\ell\, \vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\, \mathrm{d}\ell = B(r) \oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\, 2\,\pi\, r.$$



Expression de l'intensité enlacée par le contour d'Ampère : $I_{\text{enl}} = I$.

Application du théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\text{enl}}$$

soit :

$$B(r)\, 2\,\pi\, r = \mu_0\, I$$

d'où on en déduit le champ magnétostatique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, \vec{e}_\theta.$$

On peut représenter son évolution :

